Devoir à la maison de Mathématiques n°1
Les cinq solides de Platon

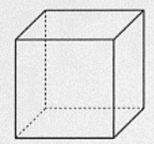
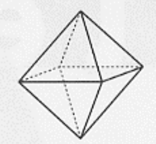
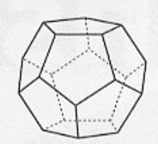
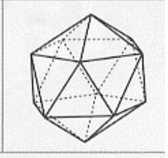
De la dimension 2 à la dimension 3.

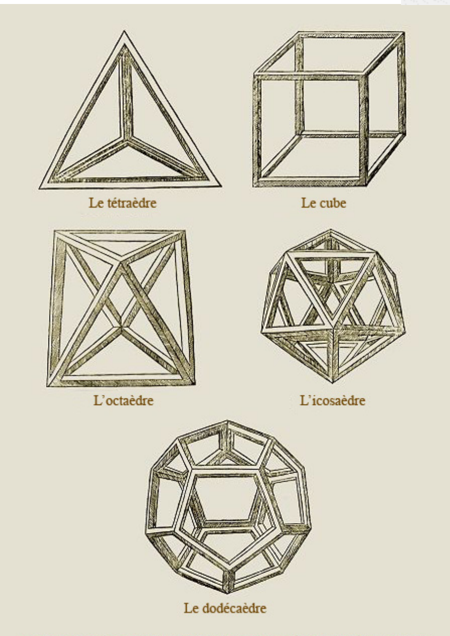
En dimension 2, il est possible de construire un polygone régulier à *n* côtés pour n'importe quel entier *n* supérieur ou égal à 3. Les seules questions soulevées par les polygones réguliers sont d'ordre pratique : est-il possible de construire de tels polygones à la règle non graduée et au compas seulement ?
De telles constructions sont simples pour le triangle équilatéral, le carré ou l'hexagone, un peu moins pour le pentagone. Gauss a démontré que cela est possible uniquement si *n* est de la forme $2^r \times p_1 \times p_2 \times ... \times p_s$ où *r* et *s* sont deux entiers naturels et où les p_i sont des nombres de Fermat distincts (nombres de la forme $2^{2^n}+1$).

En dimension 3, il n'en est pas de même : il n'existe pas nécessairement un polyèdre régulier à *n* faces, pour tout entier naturel *n*. Le nombre de possibilités est même très réduit, puisqu'il n'existe que cinq polyèdres réguliers convexes, appelés *solides de Platon* : le tétraèdre, l'octaèdre, l'icosaèdre, le cube et le dodécaèdre.

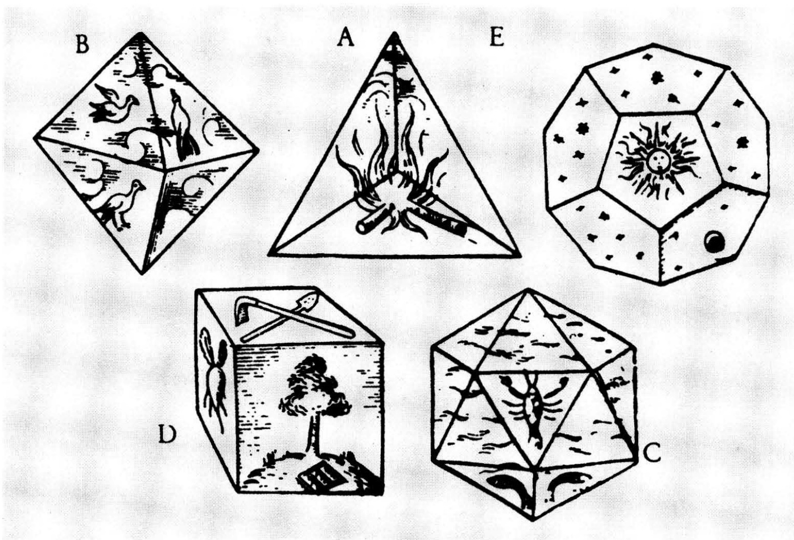
Un peu d'histoire...

C'est un peu à tort que ces solides portent le nom de solides de Platon (428-348 av J-C), dans la mesure où sa contribution est très limitée. On connaissait leur existence, le dodécaèdre exclu, bien avant le IV^{ème} siècle avant J-C. Déjà Empédocle, désireux de construire un modèle du monde physique tel qu'il était alors compris, avait associé ces quatre solides et les quatre éléments, en tenant compte de leurs propriétés respectives :
Au tétraèdre on associait le feu (le polyèdre le plus pointu), au cube la terre (le plus stable), à l'octaèdre l'eau et à l'icosaèdre l'air.
La découverte du dodécaèdre est plus tardive. Thééthète, un contemporain de Platon, montre qu'il s'agit du dernier solide régulier (convexe). Cette découverte embarrassa beaucoup les Anciens... Finalement Platon associa au dodécaèdre un 5ème élément : l'éther qui forme l'âme des êtres animés.
Aristote, après quelques transformations dont la permutation de l'éther et du feu, en fait les cinq substances simples de sa Physique.

Solide	Tétraèdre	Cube	Octaèdre	Dodécaèdre	Icosaèdre
Élément associé	Feu	Terre	Air	Univers (Tout)	Eau
Représentation					



LES CINQ CORPS PLATONICIENS (POLYÈDRES RÉGULIERS)
Dessins de Léonard de Vinci pour *La Divine proportion* de Luca Pacioli



I. Patrons de polyèdre réguliers convexes

Dessiner sur une feuille blanche à la règle et au rapporteur :

- Deux patrons différents de tétraèdre.
- Les onze patrons différents d'un cube.
- Un patron d'octaèdre, un d'icosaèdre et un de dodécaèdre.

II. Preuves de l'existence de seulement cinq polyèdres réguliers convexes

Les polyèdres réguliers convexe sont des solides vérifiant :

- Toutes ses faces sont des polygones réguliers superposables.
- Chaque sommet est relié au même nombre de faces.
- Pour chaque face, le polyèdre se trouve dans le demi-plan limité par le plan qui contient cette face.

<u>1ère méthode</u> : <u>En raisonnant sur les angles</u>,

On admet qu'à chaque sommet d'un polyèdre régulier convexe la somme des angles des différentes faces est strictement inférieure à 360° et qu'il y a au moins trois faces par sommet (ceci s'explique par le fait que dans un cas pour replier le patron il faut un espace et dans l'autre cas il y aurait un « trou »).

a) Si les faces sont des triangles équilatéraux, justifier qu'il n'y a que trois solutions possibles.
b) Si les faces sont des carrés, justifier qu'il n'y a qu'une solution possible.
c) Si les faces sont des pentagones réguliers, justifier qu'il n'y a qu'une solution possible.
d) Justifier qu'il ne peut pas avoir des faces à plus de 5 côtés.

<u>2ère méthode</u> : <u>En raisonnant avec la formule d'Euler-Poincaré</u>

Pour un solide donné, on note : S le nombre de ses sommets, A le nombre de ses arêtes et F le nombre de ses faces

1) Compléter le tableau suivant :

	S	A	F	S + F
Tétraèdre				
Cube				
Octaèdre				
Dodécaèdre				
Icosaèdre				

Que remarquez-vous ? En déduire la relation de Euler-Poincaré (formule découverte par Descartes en 1619) : S + F = ….

2) Dans un polyèdre régulier, chaque sommet appartient à p faces et à chaque sommet arrive le même nombre d'arêtes p avec $p > 2$. Chaque face est délimitée par le même nombre d'arêtes q avec $q > 2$.
   a) Justifier les égalités suivantes : $2A = pS = qF$
   b) En utilisant la relation d'Euler-Poincaré, montrer que : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2} = \frac{1}{A}$
   c) En déduire que $A = \frac{1}{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2}}$
3) Sachant que le nombre A est un entier strictement positif, en déduire du c) que $p > 6$ est impossible. De même, montrer que $q > 6$ est impossible.
4) Compléter le tableau suivant en mettant les valeurs de A, suivant les valeurs de p et de q :

	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$	$p = 6$
$q = 3$				
$q = 4$				
$q = 5$				
$q = 6$				

Combien de valeurs possibles de A trouve-t-on ?

5) Pour chaque valeur de A, donner les valeurs de F et S correspondantes et conclure.

III. Polyèdres réguliers convexes et duals

1) Gergonne (1771-1859) définit un principe de dualité qui permet d'associer à un polyèdre régulier convexe à S sommets et F faces, un polyèdre régulier convexe à F sommets et à S faces.. En utilisant le tableau du II. 1), associer à chaque polyèdre régulier son dual :

Polyèdre régulier convexe	Dual
Tétraèdre	
Octaèdre	
Icosaèdre	

2) On considère un cube ABCDA'B'C'D' dont les centres des faces A'B'C'D', ABCD, ABB'A', BCC'B', DCC'D',ADD'A' sont respecivement I, J, E, F, G et H. Soit IJEFGH le dual du cube ABCDA'B'C'D'. Le représenter sur la figure ci-jointe en annexe 1. Puis à l'aide de GeoGebra, représenter le cube et le solide IJEFGH.

3) Quelques résultats concernant IJEFGH :

a. Quelle est la nature des faces qui constituent le solide IJEFGH ?

b. Calculer la longueur EF en fonction de *a*, la longueur de l'arête du cube. En déduire FG, GH et HE.

c. Montrer que les points E, F, G, H d'une part, I, E, J, G d'autre part sont coplanaires.

d. Montrer que les points A', B, C, D' sont coplanaires. Après avoir déterminer la nature du quadrilatère A'BCD', calculer la longueur EG.

e. Calculer la mesure en degré de l'angle EFG. En déduire la nature du quadrilatère EFGH.

f. Soit O le centre du quadrilatère EFGH. Montrer que les droites (EG), (FH), (IJ) sont concourantes en O, puis qu'elles sont deux à deux perpendiculaires.

g. Montrer que le plan (EFG) est le plan médiateur du segment [IJ] (plan qui passe le milieu de [IJ] et qui est perpendiculaire (IJ)).

h. Exprimer en fonction de *a* l'aire et le volume du solide IJEFGH.

IV. Construction de polyèdres réguliers convexes

Suivre les instructions sur le site pour construire les cinq solides de Platon, tantôt avec une feuille A4, tantôt avec une enveloppe.

1) Tétraèdre (deux constructions au choix : avec un feuille ou avec une enveloppe) : annexe 2
2) Cube : annexe 3
3) Octaèdre (deux constructions au choix : avec un feuille ou avec une enveloppe) et des méthodes pour obtenir des triangles équilatéraux : annexe 4
4) Dodécaèdre (approché) : annexe 5
5) Icosaèdre : annexe 6

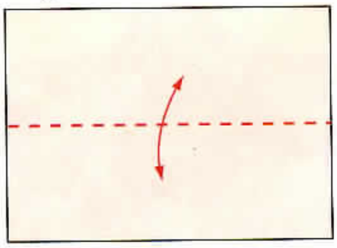
Annexe 2
Le tétraèdre

Défi

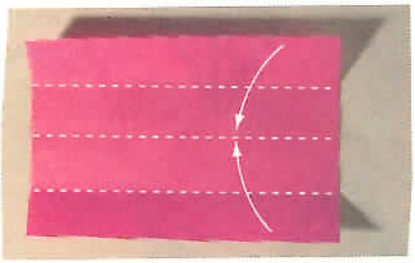
Comment réaliser un tétraèdre régulier à partir d'une feuille A4 ?

Construction

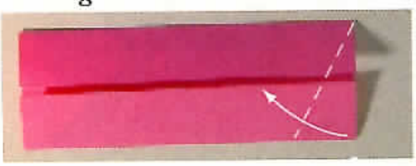
1 *Prendre une feuille A4 et marquer le pli central.*



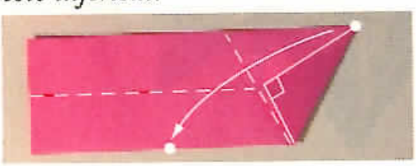
2 *Plier chaque côté jusqu'au pli central.*



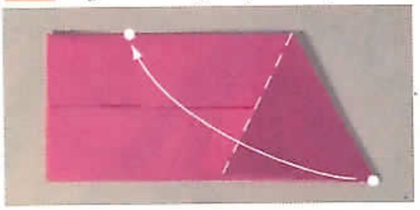
3 *Amener le coin inférieur gauche sur le pli central en partant de l'angle du haut.*



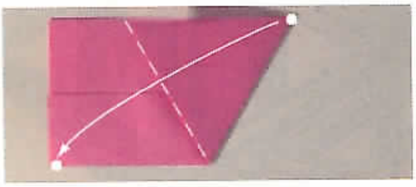
4 *Amener le coin supérieur sur le côté inférieur.*



5 *Replier le long du pli marqué en 3.*

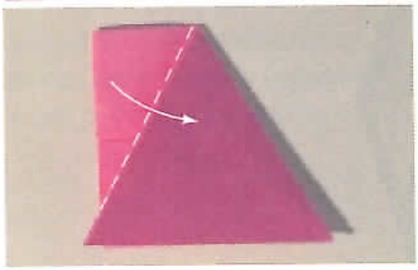


Plier à nouveau



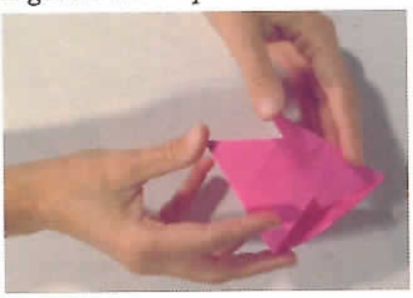
Répéter cette opération une dernière fois.

6 *Plier le dernier triangle.*

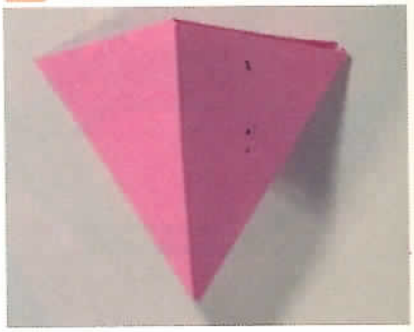


7 *Déplier à plat le tout en gardant le coin supérieur gauche plié.*

8 *Enrouler puis rentrer le triangle de gauche dans le petit de droite.*

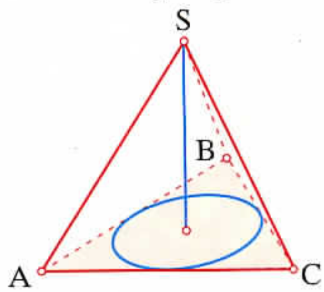


9 *Le tétraèdre est assemblé.*



Un peu de maths

Un **tétraèdre régulier** est une pyramide à 4 faces (du grec ***tétra*** : quatre), chaque face étant un *triangle équilatéral.*



La hauteur du tétraèdre régulier passe par le centre du cercle inscrit du triangle de base.

Apothème d'une pyramide : c'est la hauteur de l'une des faces. Le pliage ci-dessus permet d'obtenir une face avec une apothème marquée.

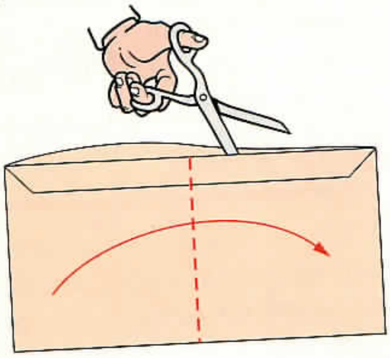
Patron et ligne des milieux : À l'étape 7, on distingue le "patron" du tétraèdre régulier (augmentée de plis d'accrochage). En inversant tous les plis des triangles équilatéraux et en assemblant le tétraèdre, on fait apparaître la "ligne des milieux".

Défi

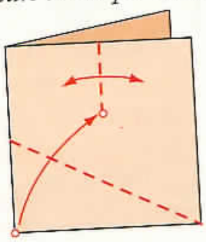
Réaliser un tétraèdre mais, cette fois-ci, avec une enveloppe de format 11 × 22 préalablement collée.

Construction

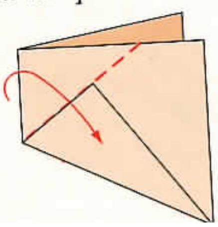
1 *Ouvrir dans le sens de la longueur l'enveloppe et plier-la en deux.*



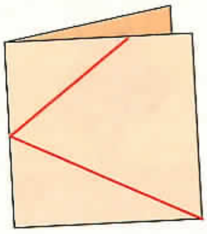
2 *Replier le haut discrètement encore en deux, puis rabattre toutes les épaisseurs sur le pli central.*



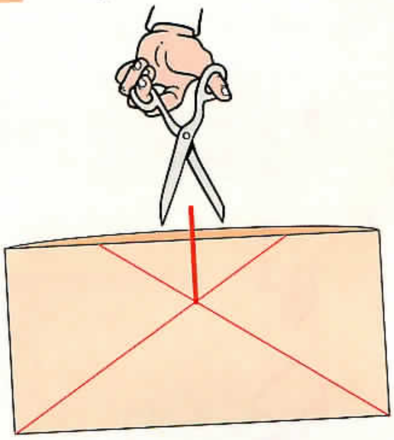
3 *Replier toutes les épaisseurs le long du pli marqué.*



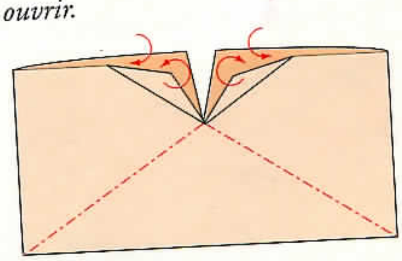
4 *Déplier complètement.*



5 *Découper.*

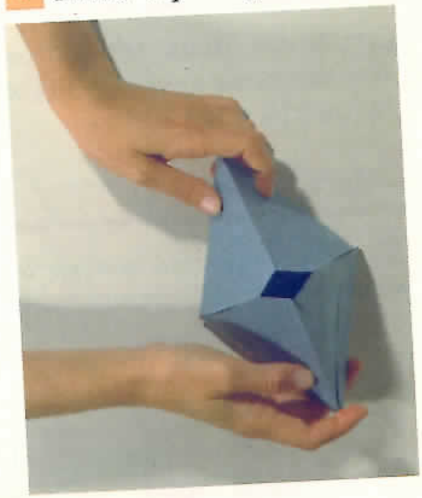


6 *Rentrer les languettes puis ouvrir.*

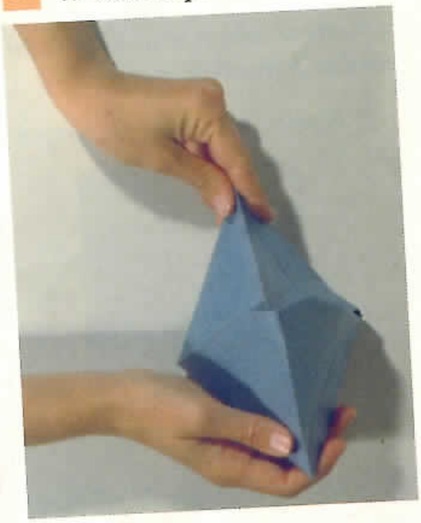


7

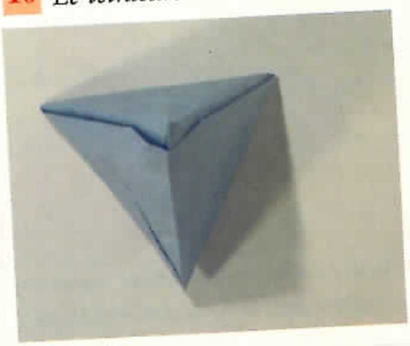
8 *Rentrer la partie gauche…*



9 *… dans la partie droite.*



10 *Le tétraèdre est terminé.*



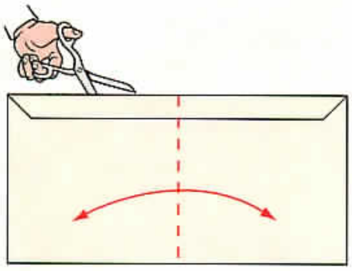
Annexe 3
Le cube

Défi

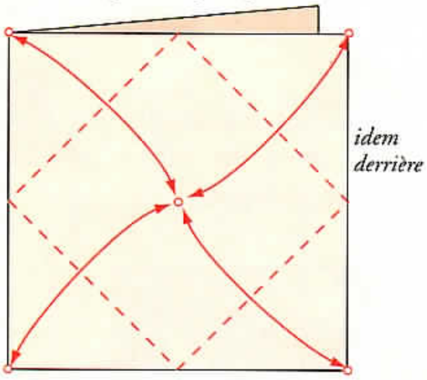
Réaliser un cube à partir d'une enveloppe 11 × 22.

Construction

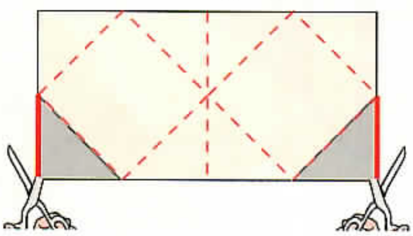
1 *Ouvrir l'enveloppe collée, puis la plier en deux.*



2 *Amener les quatre coins au centre, bien marquer les plis, puis ouvrir.*

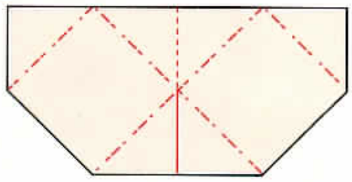


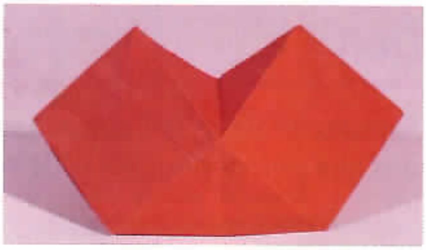
3 *Couper l'un des côtés de l'angle droit des deux triangles grisés.*

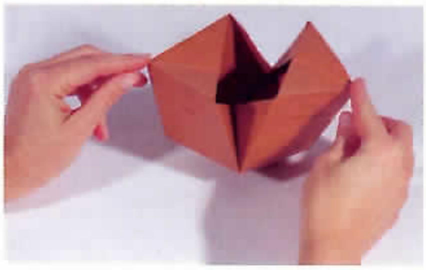


4 *Rentrer les triangles grisés à l'intérieur (voir étape 9 de la page 36).*

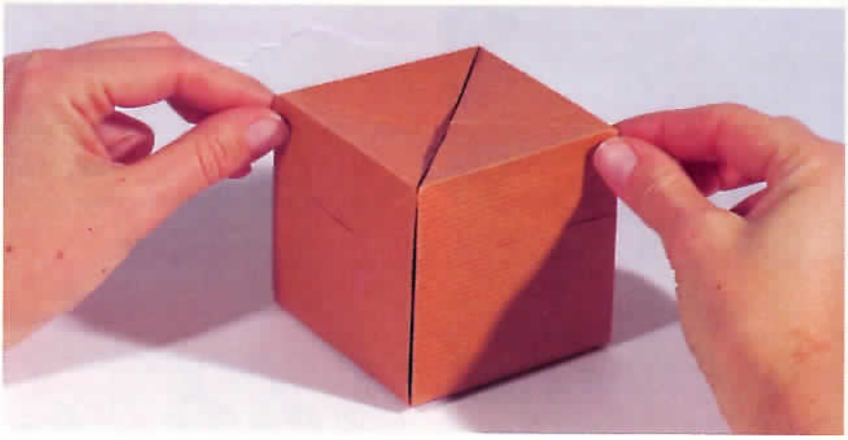
5 *Mettre en volume :*





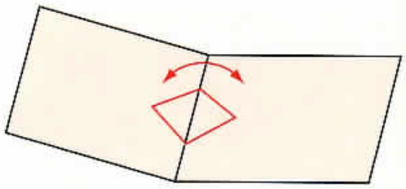


6 *Et voilà ! Le cube est terminé. Un morceau de ruban adhésif sur le dessus peut l'aider à ne pas s'ouvrir.*



Jeu

Vous pouvez coller ce cube sur une feuille un peu épaisse (bristol) pliée en deux. En le fixant judicieusement, le cube se mettra à plat ou en volume selon que vous ouvrirez ou que vous fermerez la feuille.



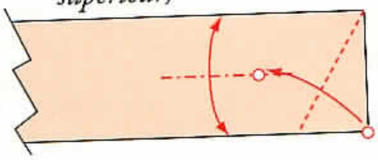
Vous pouvez également construire deux cubes et les bloquer l'un dans l'autre.

Et sous assayiez d'en assembler trois ?

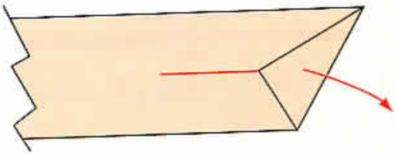
Annexe 4
L'octaèdre

Vous avez appris, page 12, comment plier une bande en triangles équilatéraux.
Voici une autre méthode permettant de marquer des plis plus précis, aboutissant à des constructions plus soignées (surtout lorsque la feuille à plier est un peu épaisse).

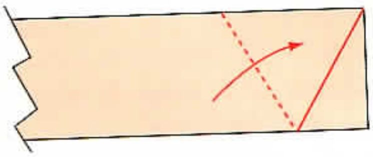
1 *Marquer le milieu, puis joindre les points en partant de l'angle supérieur,*



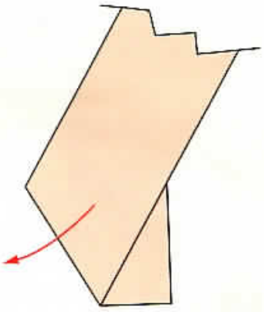
2 *comme ceci, puis déplier.*



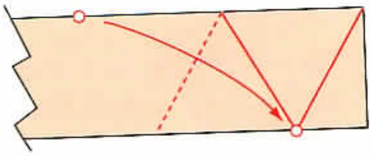
3 *Rabattre le bord supérieur le long du premier pli,*



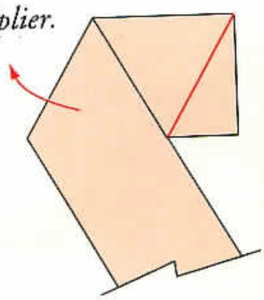
4 *comme ceci, puis déplier.*



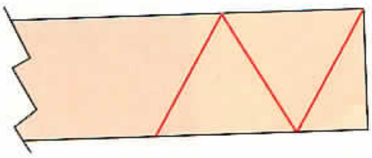
5 *Rabattre le bord supérieur le long du dernier pli.*



6 *Déplier.*



7 *Répéter l'étape 3 en remontant la bande vers le haut, puis l'étape 4 en baissant la bande…*

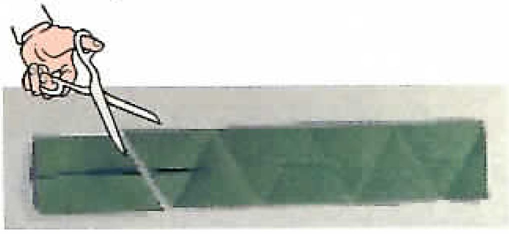


Ce pliage réalisé avec deux feuilles de format demi-A4 permet d'obtenir un octaèdre.

Construction

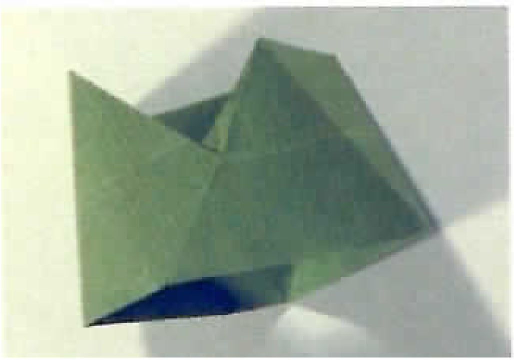
1 *Prendre une bande rectangulaire $29{,}7 \times 10{,}5$ et appliquer la méthode vue page 33 pour faire les triangles équilatéraux.*

2 *On ne va conserver que sept triangles équilatéraux.*

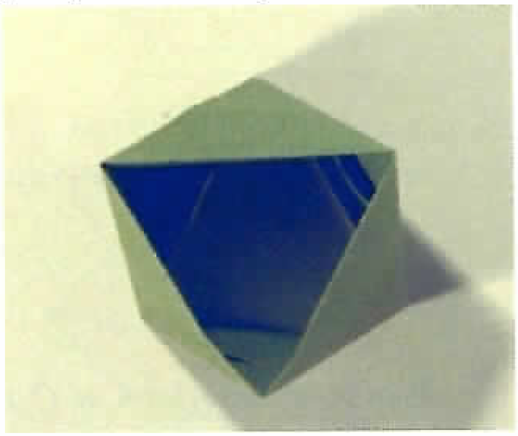


3 *Bien marquer tous les triangles équilatéraux.*
Plier le triangle à l'extrémité.

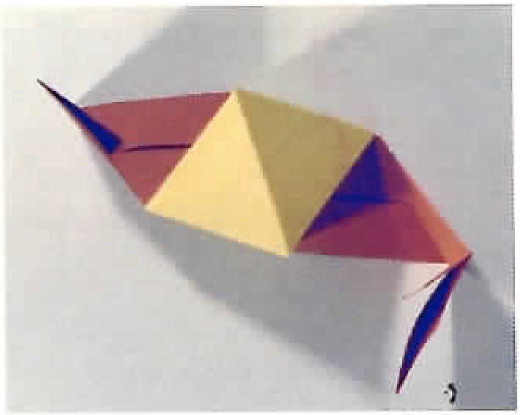
4 *Emboîter les deux extrémités en faisant une boucle.*



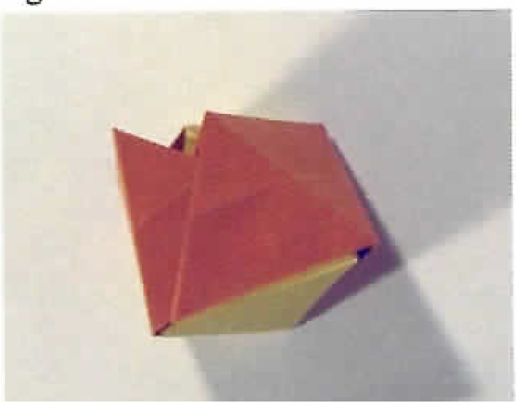
5 *On obtient un octaèdre avec six faces pleines, deux faces évidées.*



6 *Réaliser un deuxième bande (étape 3) et venir l'enrouler autour du solide obtenu à l'étape 5.*



7 *Vous voici avec un octaèdre régulier.*



Défi

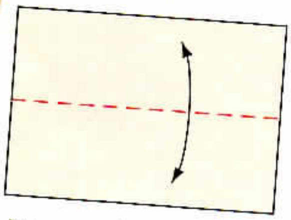
Comment obtenir un angle de 60° à partir d'un rectangle ?

Construction

Ce pliage s'obtient avec une feuille A4 ou toute autre feuille rectangulaire.

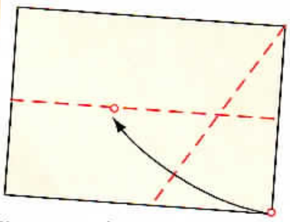
1

2



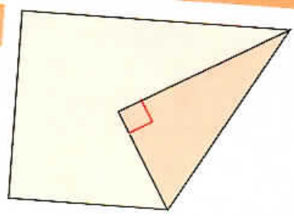
Marquer la médiane parallèle au grand côté

3

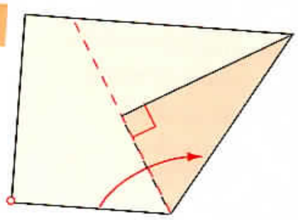


Amener un coin sur la ligne médiane en s'arrangeant pour que le pli passe sur l'autre coin.

4

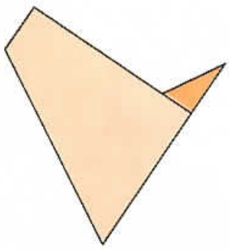


5



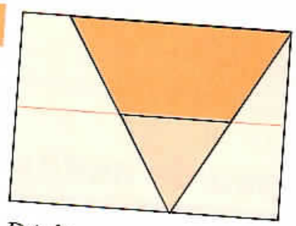
Plier le long du petit côté du triangle rectangle

6



Étonnant : le troisième coin de la feuille est venue sur l'hypoténuse !

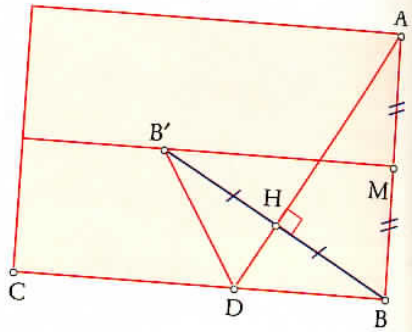
7



Déplier.
Le tour est joué !
Deux triangles équilatéraux apparaissent.

Un peu de maths

Voici la figure-clé :



Hypothèses :

- M est le milieu de [AB].
- (B′M) est parallèle à (BC).
- B et B′ sont symétriques par rapport à (AD).

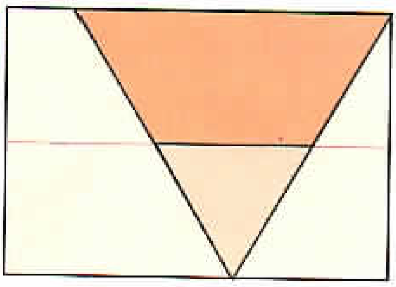
Conséquences :

- AB′ = BB′ puisque (B′M) est la médiatrice de [AB].
- AB = AB′ puisque [AB] et [AB′] sont symétriques par rapport à (AD).
- **Donc** AB = AB′ = BB′ ; le triangle **ABB′ est équilatéral.**

De plus :
$\widehat{BAD} = 30°$.
Dans le triangle rectangle ABD, on a donc $\widehat{ADB} = 60°$.
Par symétrie $\widehat{ADB'} = 60°$.
Donc $\widehat{B'DC} = 60°$ (puisque la somme des 3 angles vaut 180°).
(BD) est la bissectrice de $\widehat{ADC}$. Par pliage le long de B′D, le point C vient donc bien sur [AD] (voir étape 6).

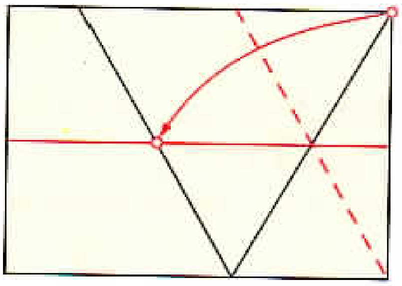
Avec une feuille A4

1



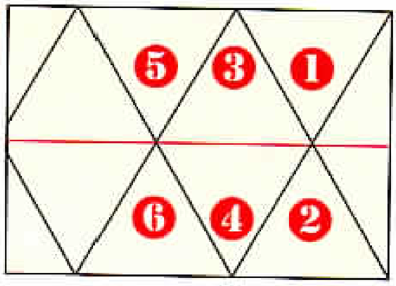
Réaliser les sept étapes (page 10) qui permettent de construire un triangle équilatéral.

2



Recommencer les étapes 3 à 7 de la page 10 en partant du coin du haut.

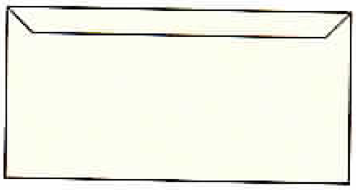
3



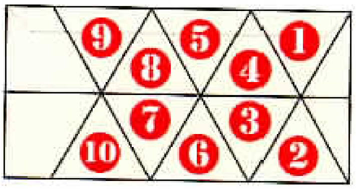
On obtient, après avoir déplié, quelques triangles équilatéraux dont six sont "entiers".

Avec une envelop-pe 11 × 22

1 *Une enveloppe 11 × 22 avec le rabat collé.*



2 *Suivre les mêmes étapes que précédemment.*

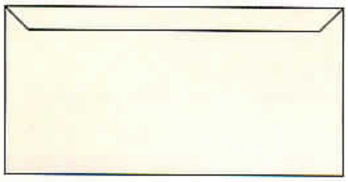


Défi

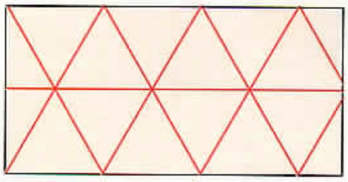
Réaliser un octaèdre en un seul élément à partir d'une enveloppe 11× 22.

Construction

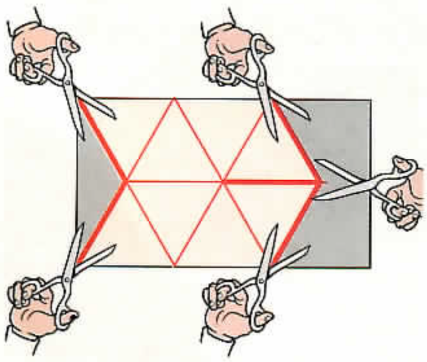
1 *Prendre et coller une enveloppe 11 × 22.*



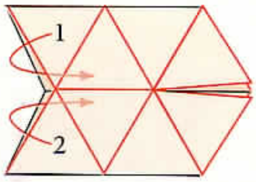
2 *Marquer les triangles équilatéraux (méthode page XX).*



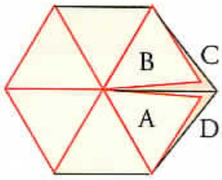
3 *Découper*



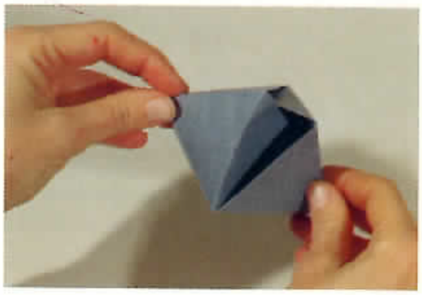
4 *Rentrer les triangles 1 et 2 à l'intérieur.*



5 *Rentrer les triangles A et C à l'intérieur.*

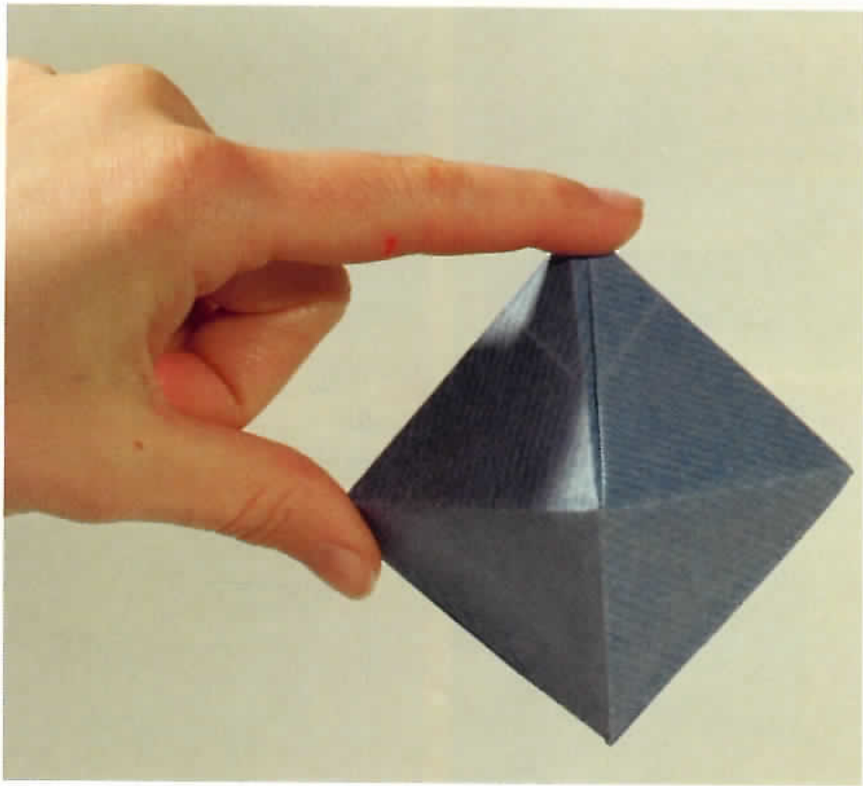


6 *Former le volume en croisant B et D à l'intérieur.*



C'est un beau pliage qui permet de passer d'une forme plane hexagonale à un volume ayant 8 faces !

7 *Voici l'octaèdre "de face" tenu par un sommet.*

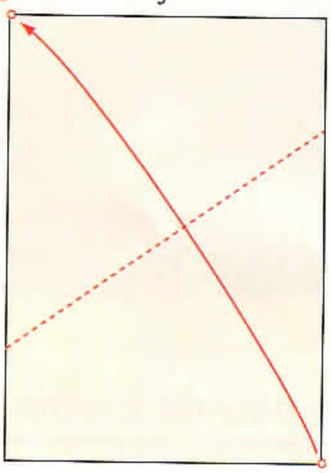


Annexe 5
Le dodécaèdre approché

Le pentamodule est une construction approchée d'un pentagone régulier à partir d'une feuille A4. Le britannique David Brill a travaillé ce genre de module dont nous donnons une variante.

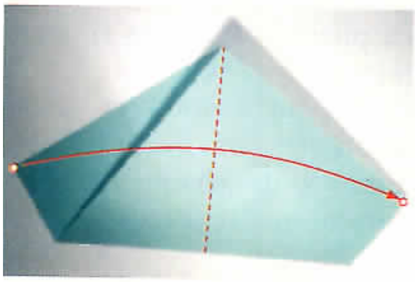
Construction

1 *Prendre une feuille A4.*

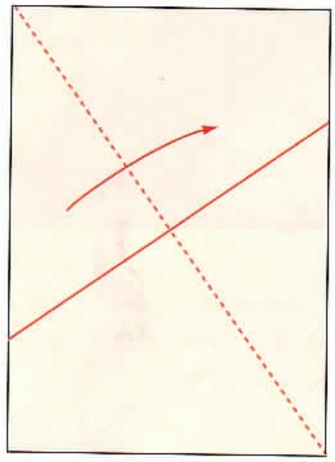


Amener le coin supérieur gauche sur le coin inférieur droit.

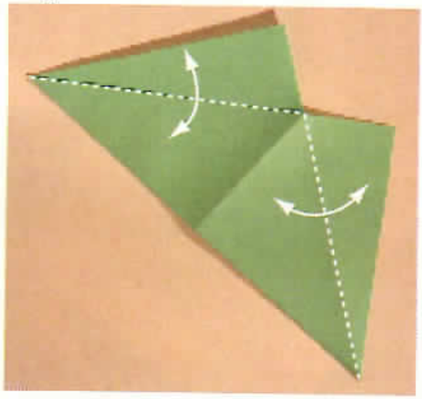
2 *Amener les deux points l'un sur l'autre.*



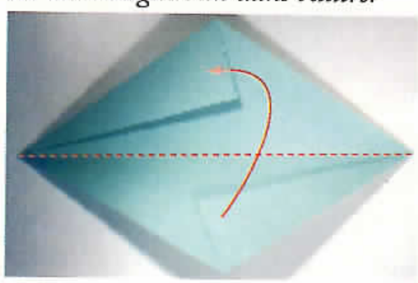
3 *Déplier le tout et replier selon la diagonale.*



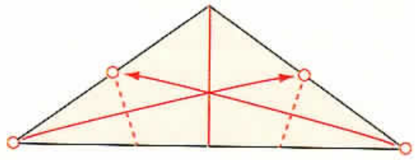
4 *Plier chaque "petit" triangle rectangle.*



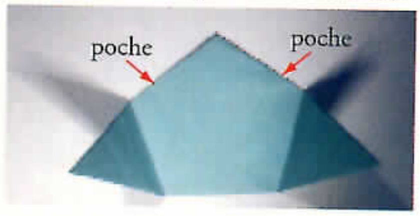
5 *Ouvrir le pliage et venir emboîter les triangles l'un dans l'autre.*



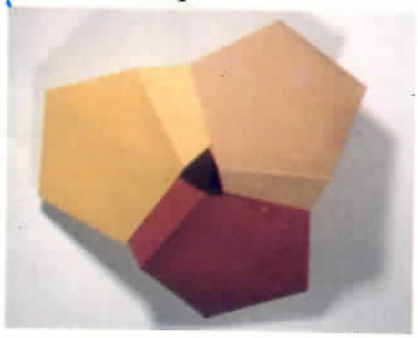
5 *On obtient un triangle isocèle. Amener chaque sommet de la base sur le côté opposé.*



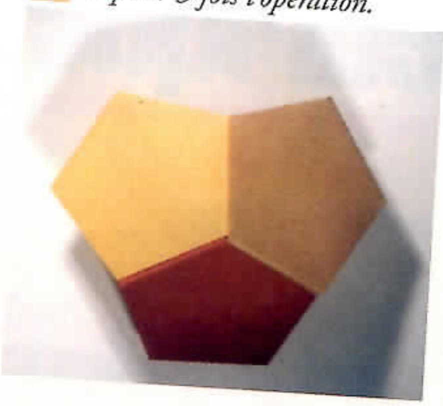
6 *Voici le pentamodule ; 2 poches permettent de recevoir des triangles d'autres modules pour un assemblage.*



7 *Construire 12 pentamodules et les assembler 3 par 3.*



8 *Répéter 3 fois l'opération.*



9 *Un peu de patience et voici le dodécaèdre.*

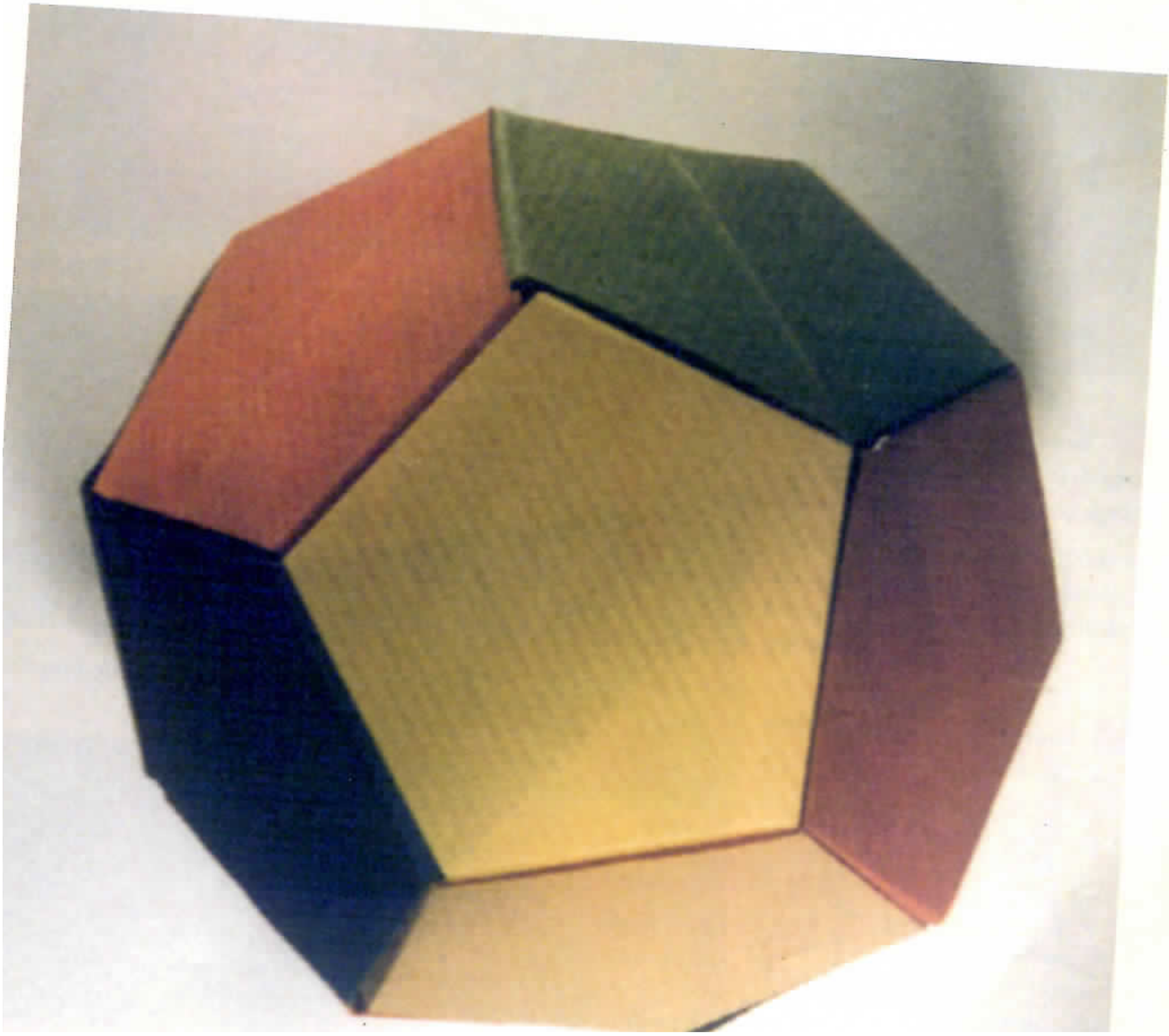
Remarques

1. Chaque pentamodule n'a que deux poches ; un des côtés du pentamodule restera libre lors de l'assemblage.

2. "Dodécaèdre" vient du grec "dodeka" qui signifie douze.

Le dodécaèdre régulier a 12 faces régulières (des pentagones), 30 arêtes et 20 sommets.

3. Par le pliage, le pentamodule n'est pas un pentagone régulier (l'erreur est faible mais elle existe), le dodécaèdre construit n'est donc pas parfait mais tellement simple à réaliser.



Annexe 6
L'isocaèdre

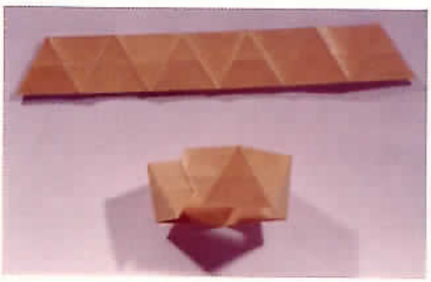
Défi

Construire un icosaèdre régulier.
Pour réaliser ce polyèdre à 20 faces, on va utiliser la même méthode vue pour l'octaèdre régulier.

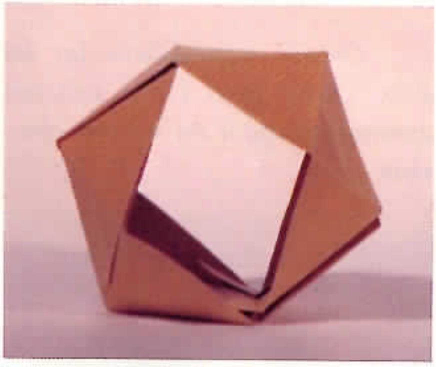
Construction

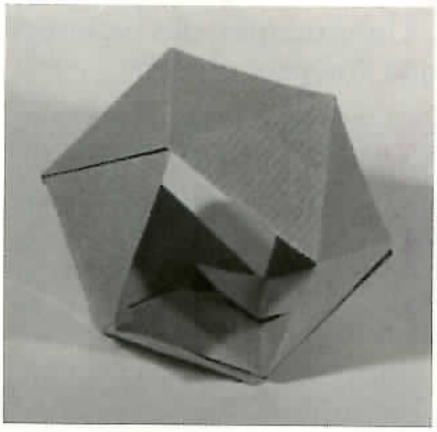
1 *Prendre une bande de dimensions 29,7 × 8,6.*
Construire 11 triangles équilatéraux *(voir page 33).*

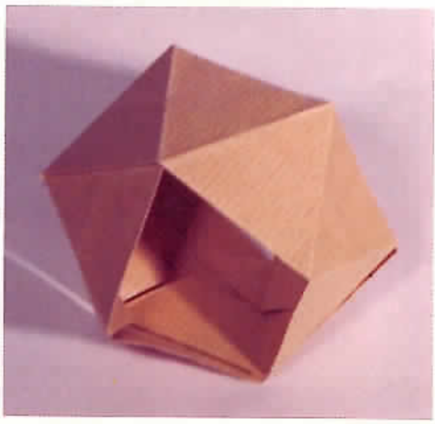
2 *Plier la bande en bracelet.*



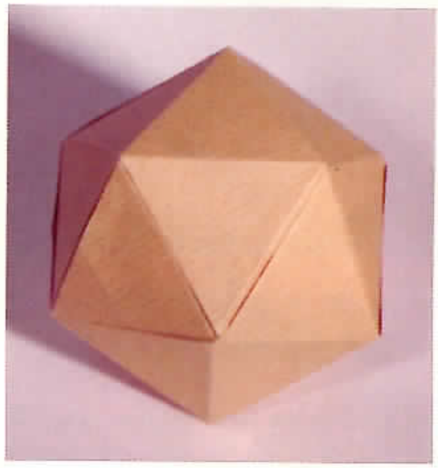
3 *Trois bandes permettent d'obtenir la structure de l'icosaèdre.*





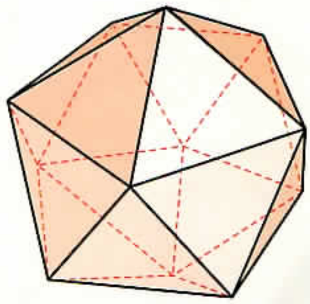


5 *Les deux dernières bandes tressées permettent d'obtenir l'icosaèdre régulier.*



Un peu de maths

L'icosaèdre est un polyèdre ayant 20 faces et 12 sommets, chaque face étant un triangle équilatéral.



L'icosaèdre réalisé ci-dessus est régulier et convexe (i.e. chaque face peut être posé sur une table).